T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
LISTA 6

Wrocław, 12 kwietnia 2010

ZADANIE 1. Udowodnij, że funkcja $f : X \to Y$ spełniająca warunek Lipschitza (z dowolną stałą $c > 0$) jest jednostajnie ciągła. Podaj przykład na to, że odwrotna implikacja nie jest prawdziwa.

ZADANIE 2. Oblicz granice ciągów rekurencyjnych:

$$a_0 = 13\pi, \quad a_{n+1} = \frac{7}{8}a_n + 50$$

$$a_0 = \ln 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_n + 2}$$

$$a_0 = 1410, \quad a_{n+1} = \frac{\pi \cos(a_n)}{3\sqrt{3}}$$

ZADANIE 3. *Metoda iteracyjna znajdowania pierwiastka.* Niech f będzie funkcją ciągłą i ściśle rosnącą na przedziale $[a, b]$, taką, że $f(a) < 0 < f(b)$. Oczywiście istnieje tam jedyny pierwiastek (czyli miejsce zerowe f). Udowodnij, że następująca procedura rekurencyjna zawsze zbiega do tego pierwiastka (zarówno x_n jak i y_n):

$$(x_0, y_0) = (a, b)$$

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n, \frac{x_n+y_n}{2}); & \text{gdy } f(\frac{x_n+y_n}{2}) \geq 0 \\ (\frac{x_n+y_n}{2}, y_n); & \text{gdy } f(\frac{x_n+y_n}{2}) < 0. \end{cases}$$

(Zadanie polega *de facto* na znalezieniu przestrzeni zupełnej i odpowiedniego odwzorowania zbliżającego.)

Definicja Przekształcenie $f : X \to X$ przestrzeni metrycznej w siebie jest *słabo zbliżające*, jeśli

$$\forall_{x,y \in X} \ d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

ZADANIE 4. Udowodnij, że jeśli $f : D \to D$, gdzie D jest domkniętym podzbiorem prostej rzeczywistej, jest funkcją słabo zbliżającą, i POSIADA punkt stały, to spełniona jest teza twierdzenia Banacha (tzn. punkt stały jest jedyny i każda orbita zbiega do niego).

ZADANIE 5. Podaj przykład odwzorowania słabo zbliżającego na domkniętym podzbiorze prostej, nie posiadającego punktu stałego.